数理解析研究所講究録
第 1855 巻 2013 年 19-22

ON SPECTRAL BOUNDS FOR SYMMETRIC MARKOV CHAINS WITH COARSE RICCI CURVATURES

熊本大学・自然科学研究科　桑江一洋
KAZUHIRO KUWAE
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
KUMAMOTO UNIVERSITY

ABSTRACT. We prove an upper estimate of spectral radius for (non-linear) transition operator P over L^p-maps in the framework of symmetric Markov chains on a Polish space with positive lower bound of n-step coarse Ricci curvatures. The target space is a complete separable 2-uniformly convex space with some geometric conditions including the case of CAT(0)-spaces. As consequences, strong L^p-Liouville property for P-harmonic maps, a global Poincaré inequality (spectral gaps) for energy functional over L^2-maps (or functions), and spectral bounds of L^2-generator of Markov chains are presented.

1. コースリッチ曲率

(E,d) を完備可分距離空間 (ポーランド空間) で $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N}\cup\{0\}$ とする. $\mathcal{P}^p(E)$ で (E,d) 上の p-次の積率有限の確率測度の全体とする。$\mathbf{X}=(\Omega, X_k, \theta_k, \mathcal{F}_k, \mathcal{F}_\infty, \boldsymbol{P}_x)_{x\in E}$ を (E,d) 上の保存的なマルコフ連鎖として. その推移確率を $P(x,dy)$ もしくは $P_x(dy)$ で表す：$P(x,dy) := \boldsymbol{P}_x(X_1\in dy)$, $x\in E$. $\mathbf{X}$ に対して

(P1) for each $x\in E$, $\mathcal{B}(E)\ni A\mapsto P(x,A)$ is a probability measure on $(E,\mathcal{B}(E))$.

(P2) for each $A\in\mathcal{B}(E)$, $E\ni x\mapsto P(x,A)$ is $\mathcal{B}(E)$-measurable.

が成立するが, 逆にこれらが成立すれば保存的なマルコフ連鎖 $\mathbf{X}$ で $P(x,dy)=\boldsymbol{P}_x(X_1\in dy)$, $x\in E$ をみたすものが構成できることはよく知られている. 非負もしくは有界な E 上の $\mathcal{B}(E)$-可測関数 f と $n\in\mathbb{N}$ に対して $Pf(x) := \int_X f(y)P(x,dy) = \boldsymbol{E}_x[f(X_1)]$, $P^nf(x) := P(P^{n-1}f)(x)$ とおくと $P^nf(x)=\boldsymbol{E}_x[f(X_n)]$ が成立する. 任意の $(E,\mathcal{B}(E))$ 上の非負測度 ν と $n\in\mathbb{N}$ に対し測度 νP^n を $\nu P^n(A) := \langle\nu, P^n\mathbf{1}_A\rangle := \int_E P^n(x,A)\nu(dx) = \boldsymbol{P}_\nu(X_n\in A)$, $A\in\mathcal{B}(E)$　で定める。$\delta_xP^n=P^n_x$, $x\in E$ に注意する. さらに $\mathbf{X}$ に対して次の条件を課す.

(P3) for each $x\in E$, $P_x\in\mathcal{P}^1(E)$.

$\mu,\nu\in\mathcal{P}^1(E)$ の L^1-ヴァッサーシュタイン距離 $d_{W_1}(\mu,\nu)$ を

$$d_{W_1}(\mu,\nu) := \inf\left\{\int_{E\times E} d(x,y)\pi(dxdy)\;\middle|\;\pi\in\Pi(\mu,\nu)\right\},$$

Date: December 18.

where $\Pi(\mu,\nu) := \{\pi \in \mathcal{P}(E\times E) \mid \pi(A\times E) = \mu(A), \pi(E\times B) = \nu(B)$ for any $A, B \in \mathcal{B}(E)\}$. で定める. オリヴィエによるコースリッチ曲率を n 倍だけ時間変更したマルコフ連鎖に適用したものを以下で定める.

Definition 1.1 (コースリッチ曲率, Ollivier(09)). 異なる2点 $x, y \in E$ に対し, $\mathbf{X}$ の n-**階コースリッチ曲率** $\kappa_n(x,y)$ を

$$\kappa_n(x,y) := 1 - \frac{d_{W_1}(P^n_x, P^n_y)}{d(x,y)}, \quad (x,y) \in E\times E \setminus \mathsf{diag}$$

で定め, $\kappa_n := \inf\{\kappa_n(x,y) \mid (x,y) \in E\times E\setminus \mathsf{diag}\} \in [-\infty, 1]$ をその下限と呼ぶ。 $n=1$ のとき $\kappa_1(x,y)$ (resp. κ_1) の代わりに $\kappa(x,y)$ (resp. κ) と記す。このときがオリヴィエ自身が導入したコースリッチ曲率である.

Definition 1.2 (測地線の直交性). (Y, d_Y) を2-一様凸空間とする. 2つの最短測地線分 η, γ が点 p_0 で交差しているとする. このとき γ **が** η **に対して** p_0 **で直交する** ($\gamma \perp_{p_0} \eta$ と表記する) ことを任意の $x \in \gamma$ と $y \in \eta$ に対して $d_Y(x, p_0) \le d_Y(x,y)$ が成立することとする. つぎの条件を考える:

- **(B)** γ, η を p_0 で交差する最短測地線分とするこのとき $\gamma \perp_{p_0} \eta$ なら $\eta \perp_{p_0} \gamma$ が成立する.

Definition 1.3 (凸幾何学, see Kendall(90)). (Y, d_Y) を測地空間とする. $q \ge 1$ に対して, (Y, d_Y) が **指数** q **の凸幾何学** ($(\mathbf{CG})_\mathbf{q}$ と表記する) 性をみたすとは $Y\times Y$ 上の対称な凸関数 Φ と定数 $C>0$ で

$$C^{-1}d_Y^q(x,y) \le \Phi(x,y) \le C d_Y^q(x,y) \tag{1.1}$$

をみたすものが存在することとする, ただし $q>1$ のときはさらに $\mathrm{diam}(Y) < \infty$ を条件に含める。

Definition 1.4 (分散). $p \ge 1$ を固定する. $\mu \in \mathcal{P}(E)$ と距離空間 (Y, d_Y), $E\times E$ 上の非負対称関数 Φ で対角線上で退化するものと $u \in L^p(E, Y; \mu)$ を考える. u の Φ に関する p-**分散** $\mathrm{Var}_\mu^{\Phi^p}(u)$ を

$$\mathrm{Var}_\mu^{\Phi^p}(u) := \inf_{y\in Y}\int_E \Phi^p(u(x), y)\mu(dx) (\le \infty)$$

で定める. また u の Φ に関する **準** p-**分散** $\overline{\mathrm{Var}}_\mu^{\Phi^p}(u)$ を

$$\overline{\mathrm{Var}}_\mu^{\Phi^p}(u) := \frac{1}{2}\int_E\int_E \Phi^p(u(y), u(x))\mu(dx)\mu(dy) (\le \infty)$$

で定める. 容易に不等式 $\mathrm{Var}_\mu^{\Phi^p}(u) \le 2\overline{\mathrm{Var}}_\mu^{\Phi^p}(u)$ が確かめられる. $\Phi = d_Y$ のときは $\mathrm{Var}_\mu^{\Phi^p}(u)$ (resp. $\overline{\mathrm{Var}}_\mu^{\Phi^p}(u)$) の代わりに $\mathrm{Var}_\mu^p(u)$ (resp. $\overline{\mathrm{Var}}_\mu^p(u)$) と表す. さらに $p=2$ で $\Phi = d_Y$ のときは, $\mathrm{Var}_\mu(u) := \mathrm{Var}_\mu^2(u)$ $\overline{\mathrm{Var}}_\mu(u) := \overline{\mathrm{Var}}_\mu^2(u)$ と表記し, それらを単に**分散**, **準分散**とそれぞれ呼ぶ.

Definition 1.5 (写像のエネルギー). $m \in \mathcal{P}(E)$ と m-対称マルコフ連鎖 $\mathbf{X}$ および距離空間 (Y, d_Y) を考える. $u \in L^2(E, Y; m)$ に対し,

$$E(u) := \frac{1}{2}\int_E \int_E d_Y^2(u(y), u(x))P(x, dy)m(dx)$$

u の $\mathbf{X}$ に関する **エネルギー** と呼ぶ.

2. 主結果

$p \geq 1$ と $m \in \mathcal{P}(E)$ を固定し $\mathrm{supp}[m] = E$ を仮定する. (E, d) から条件 **(B)** をみたす完備な 2-一様凸空間 (Y, d_Y) に値をとる L^p-写像 u に対して 推移作用 Pu や $P^n u$ を (Y, d_Y) 上の確率測度 u_*P_x や $u_*P_x^n$ の重心の概念を経由して定義することができる.

Theorem 2.1 ($L^p(E, Y; m)/\{\mathrm{const}\}$ 上の P の非線形スペクトル半径の評価). $m \in \mathcal{P}^p(E)$ と $\kappa \in \mathbb{R}$ を仮定する. (Y, d_Y) を条件 **(B)** をみたす完備な 2-一様凸空間で, ある $q \geq 1$ に関して $\mathbf{(CG)_q}$ を満たすとする. このとき $1 \leq q < p < +\infty$ もしくは $0 < p \vee 1 < q$ なら

$$\underline{\lim}_{\ell \to \infty} \left(\sup_{u \in L^p(E,Y;m)} \frac{\mathrm{Var}_m^{\Phi^p}(P^\ell u)}{\mathrm{Var}_m^{\Phi^p}(u)} \right)^{\frac{1}{p\ell}} \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} (1 - \kappa_n)^{\frac{1}{n}} \wedge 1, \tag{2.1}$$

$$\underline{\lim}_{\ell \to \infty} \left(\sup_{u \in L^p(E,Y;m)} \frac{\overline{\mathrm{Var}}_m^{\Phi^p}(P^\ell u)}{\overline{\mathrm{Var}}_m^{\Phi^p}(u)} \right)^{\frac{1}{p\ell}} \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} (1 - \kappa_n)^{\frac{1}{n}} \wedge 1. \tag{2.2}$$

$P^\ell u$ の定義が P の *iteration* による定義 $P(P(P(\cdots P(Pu)\cdots)))$ でないので左辺の極限の存在は Y がヒルベルト空間のときしか保証されないことに注意されたい.

Theorem 2.2 (L^2-関数に対するポアンカレ不等式). H を実可分ヒルベルト空間とする. $m \in \mathcal{P}^2(E)$ と $\kappa \in \mathbb{R}$ を仮定する. このとき $f \in L^2(E, H; m)$ に対して

$$1 - \inf_{n \in \mathbb{N}} (1 - \kappa_n)^{\frac{1}{n}} \wedge 1 \leq \frac{\mathcal{E}(f)}{\mathrm{Var}_m(f)} \leq 1 + \inf_{n \in \mathbb{N}} (1 - \kappa_n)^{\frac{1}{n}} \wedge 1. \tag{2.3}$$

Theorem 2.3 (強 L^p-リュウビル性). ある $n \in \mathbb{N}$ で $\kappa_n > 0$ が成立するとする. $m \in \mathcal{P}^p(E)$ と $\kappa \in \mathbb{R}$ を仮定する. (Y, d_Y) を条件 **(B)** をみたす完備可分な 2-一様凸空間で, ある $q \geq 1$ に関して $\mathbf{(CG)_q}$ を満たすとする. また $1 \leq q < p < +\infty$ もしくは $0 < p \vee 1 < q$ を仮定する. このとき $u \in L^p(E, Y; m)$ が $Pu = u$ *m-a.e. on* E を満たせば u は *m-a.e.* に定値写像である.

Theorem 2.4 (L^2-写像に対するポアンカレ不等式). ある $n \in \mathbb{N}$ で $\kappa_n > 0$ が成立するとする. $m \in \mathcal{P}^2(E)$ と $\kappa \in \mathbb{R}$ を仮定する. (Y, d_Y) を条件 **(B)** をみたす完備な 2-一様凸空間で, ある $q \in [1, 2]$ に関して $\mathbf{(CG)_q}$ を満たすとする. このとき $\varepsilon \in]0, 1 - (1 - \kappa_n)^{\frac{1}{qn}}[$ なら, ある $\ell_0 \in \mathbb{N}$ で $\varepsilon, \kappa_n, (E, d, m, \mathbf{X})$ と (Y, d_Y) に依存するものがとれて

$$(1 - (1 - \kappa_n)^{\frac{1}{qn}} - \varepsilon)^2 \mathrm{Var}_m(u) \leq 72\ell_0^2 E(u) \quad u \in L^2(E, Y; m)$$

が成立する. 特に (Y, d_Y) が完備可分な $CAT(0)$-空間ならば

$$\inf_{u\in L^2(E,Y;m)} \frac{E(u)}{\mathrm{Var}_m(u)} \geq \frac{(1-(1-\kappa_n)^{\frac{1}{n}}\wedge 1-\varepsilon)^2}{8\ell_0^2} > 0$$

を得る.

References

[1] E. Kokubo and K. Kuwae, *On spectral bounds for symmetric Markov processes with coarse Ricci curvatures*, preprint, 2012.

[2] Y. Ollivier, *Ricci curvature of Markov chains on metric spaces*, J. Func. Anal. **256** (2009), no. 3, 810–864.

Kazuhiro Kuwae
Department of Mathematics and Engineering
Graduate School of Science and Technology
Kumamoto University
Kumamoto, 860-8555
JAPAN
E-mail address: kuwae@gpo.kumamoto-u.ac.jp